



Līdzfinansē
Eiropas Savienība

 **G-STEAM**
Green STEAM ecosystems



Pedagogu konference

“Green-STEAM. Domā, radi, sadarbojies!”

Jelgavas Valsts ģimnāzijā

30.04.2025



Līdzfinansē
Eiropas Savienība

G-STEAM
Green STEAM ecosystems



Matemātiskā modelēšana no STEAM līdz ZPD

Liene Krieviņa, Jelgavas Valsts ģimnāzijas matemātikas skolotāja

30.04.2025



Aplūkosim matemātiskos modeļus, kuri tika iekļauti dažādās **STEAM nodarbībās, mācību** un matemātiskās modelēšanas procesā, veidojot **centralizētā eksāmena piekļuves nosacījuma darbus**, kā arī rakstot skolēnu **zinātniskās pētniecības darbus** matemātikas nozarē.

Matemātiskā modelēšana ir process, kurā matemātiku izmanto, lai prognozētu, analizētu, prezentētu vai kā citādi sniegtu ieskatu reālās pasaules parādībās.

Rīcības vārdu skaidrojums:

Izveido matemātisko modeli Lieto matemātiku (izteiksmi, vienādojumu, funkciju, ģeometrisku figūru, shematisku zīmējumu, izvēļu koku u. tml.) reālās pasaules situācijas iespējami vienkāršai un precīzai aprakstīšanai, kas tālāk ļauj veidot pamatotu problēmas atrisinājumu.

*Ministru kabineta noteikumi Nr. 747 par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem, Rīgā, 2018. gada 27. novembrī.

M.Li.2. Risināt problēmu matematikai raksturīgi nozīmē saskatīt struktūras, sistēmas, sakarības, veidot vispārinājumus un tos pierādīt

2.2. Matemātiskā modelēšana (reāla problēma → matemātiskais modelis → matemātiskais atrisinājums → reālās problēmas atrisinājums) un citi problēmrisināšanas paņēmieni	Beidzot 3. klasi	Beidzot 6. klasi	Beidzot 9. klasi
	M.3.2.2.1. Pēc norādēm individuāli vai grupā veic atsevišķus matemātiskās modelēšanas soļus jaunās situācijās.	M.6.2.2.1. Jaunā situācijā individuāli vai sadarbojoties (arī ar skolotāju) veic matemātiskās modelēšanas soļus.	M.9.2.2.1. Skaidro matemātiskās modelēšanas soļus, to mērķi, savstarpējo saistību konkrētos piemēros.
			M.9.2.2.2. Nosauc matemātisku modeļu (izteiksme, vienādojums, funkcija, ģeometriskā figūra, shematiskā attēls u. tml.) piemērus un raksturo to lietošanu problēmu risināšanā.
			M.9.2.2.3. Jaunā situācijā individuāli vai grupā atrisina problēmu, veicot visus matemātiskās modelēšanas soļus (to skaitā izmantojot digitālos rīkus).

*Ministru kabineta noteikumi Nr. 416 par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem, Rīgā, 2019. gada 3. septembrī.

VSK.M.Li.2. Risināt problēmu matematikai raksturīgi nozīmē saskatīt struktūras, sistēmas, sakarības, veidot vispārinājumus un tos pierādīt

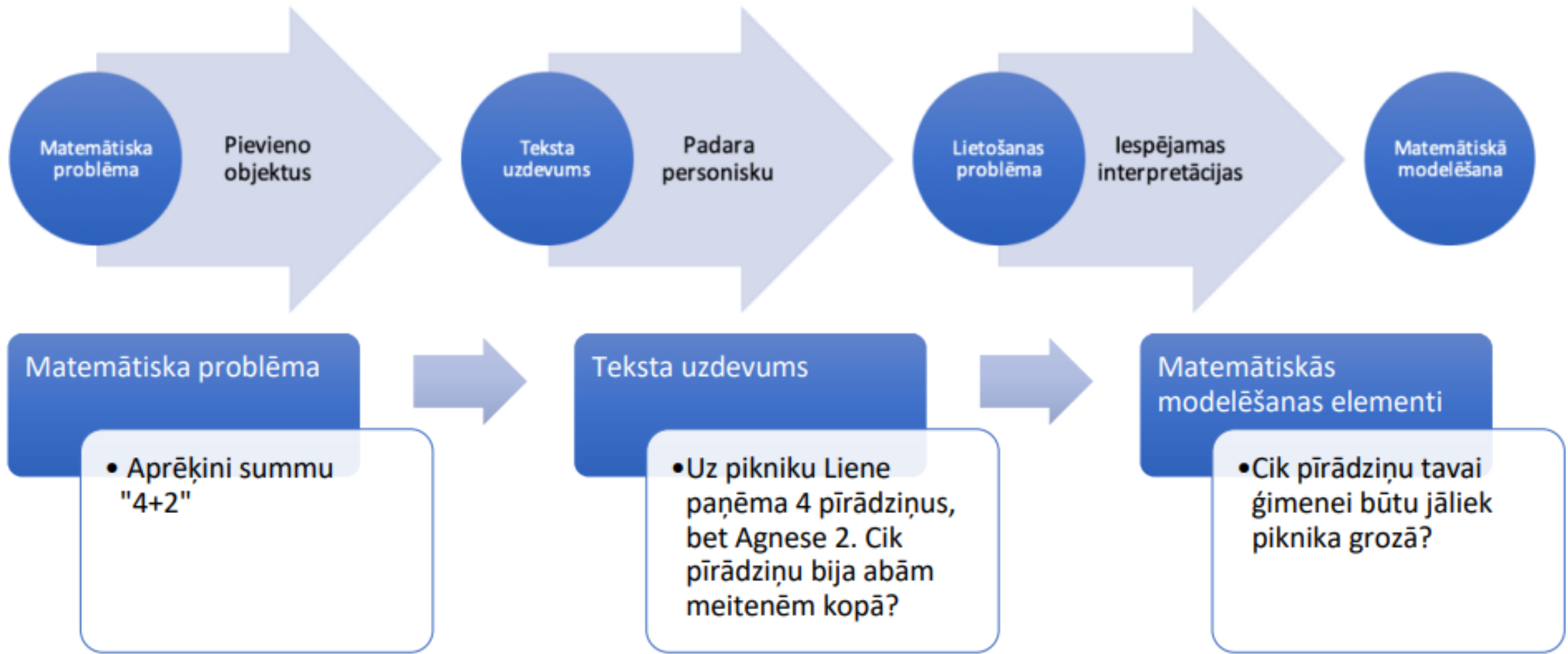
	Vispārīgais apguves līmenis	Optimālais apguves līmenis	Augstākais apguves līmenis
2.2. Matemātiskā modelēšana un citi problēmrisināšanas paņēmieni	M.V.2.2.1. Lieto pazīstamu matemātisko modeli, lai atrisinātu problēmu ar praktisku vai ar citu mācību jomu kontekstu. Pēc norādēm izvērtē iespējas lietot konkrētās zināšanas vai matemātisko modeli.	M.O.2.2.1. Veic visus matemātiskās modelēšanas soļus, lai atrisinātu problēmu ar citu mācību jomu vai matemātisku kontekstu. Izvērtē dažādu matemātisko modeļu lietojumu, ievērojot situācijas kontekstu.	M.A.2.2.1. Formulē pētāmo jautājumu sev nozīmīgā kontekstā un veic visus matemātiskās modelēšanas soļus, lai atrisinātu autentisku problēmu. Izvērtē iegūtos rezultātus un, ja nepieciešams, uzlabo matemātisko modeli.
	M.V.2.2.2. Lieto pamatskolā apgūtos problēmrisināšanas paņēmienus (spriežu no beigām, sadalītu problēmu daļās, pāreju uz līdzīgu, vienkāršāku problēmu u. tml.) situācijās ar vienkāršu matemātisko kontekstu.	M.O.2.2.2. Argumentē problēmrisināšanas paņēmiena (spriežu no beigām, sadalītu problēmu daļās, pāreju uz līdzīgu, vienkāršāku problēmu u. tml.) izvēli, lai atrisinātu problēmu ar pazīstamu matemātisko kontekstu.	M.A.2.2.2. Apzina, izvērtē matematikai raksturīgo problēmrisināšanas paņēmieni (spriežu no beigām, sadalītu problēmu daļās, pāreju uz līdzīgu, vienkāršāku problēmu u. tml.) lietojumu, izstrādājot kompleksas problēmas risinājuma plānu.

7.3. Kā raksturo sakarību starp mainīgiem lielumiem?

Skolēni iepazīst matemātiskās modelēšanas jēdzienu, modelē reālu procesu, izmantojot lineāru funkciju. Šajā tematā ieteikums runāt ar skolēniem par matemātisko modelēšanu kā 3 soļu procesu – risinot problēmas, skolēni mācās tos izšķirt, domā par to mērķi un saistību. Nosacīti katru situācijas uzdevumu var saistīt ar matemātisko modelēšanu, bet nereti to risināšana ir atdarināšana pēc parauga, tāpēc par prasmi izveidot un atrisināt situācijas matemātisko modeli var secināt tad, ja situācija skolēnam ir jauna (protams, apgūto zināšanu ietvaros).

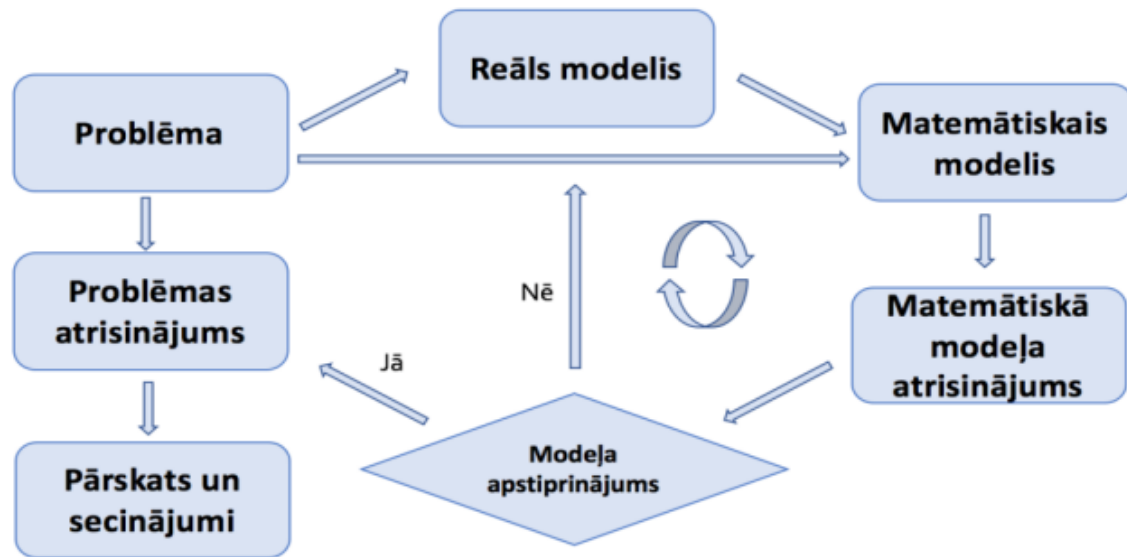
7.4. Kā pieraksta un pēta funkcijas, kuru grafiks ir taisne?

Saturs piemērots jēdzienu “matemātiskais modelis”, “matemātiskā modelēšana” ieviešanai skolēnu komunikācijā. Šajā tematā un turpmāk skolēni pakāpeniski veidos izpratni par visiem matemātiskās modelēšanas soļiem, to mērķi un savstarpējo saistību.

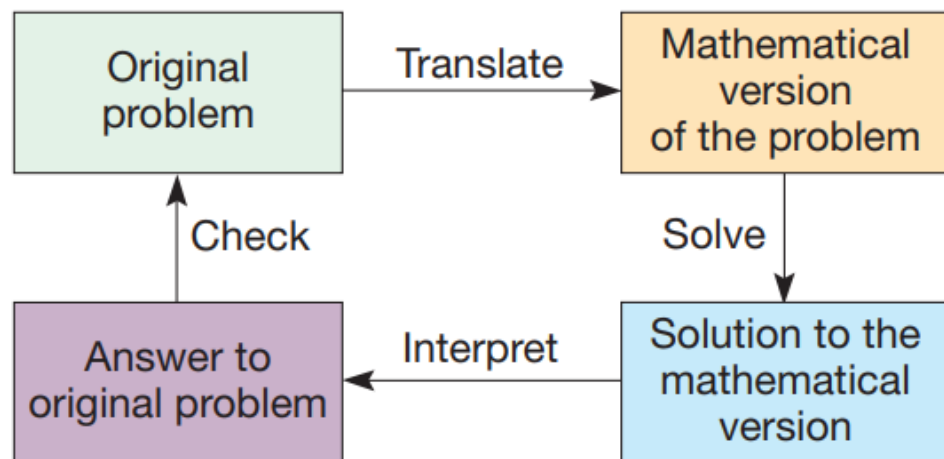


Dažādi matemātiskās modelēšanas cikli

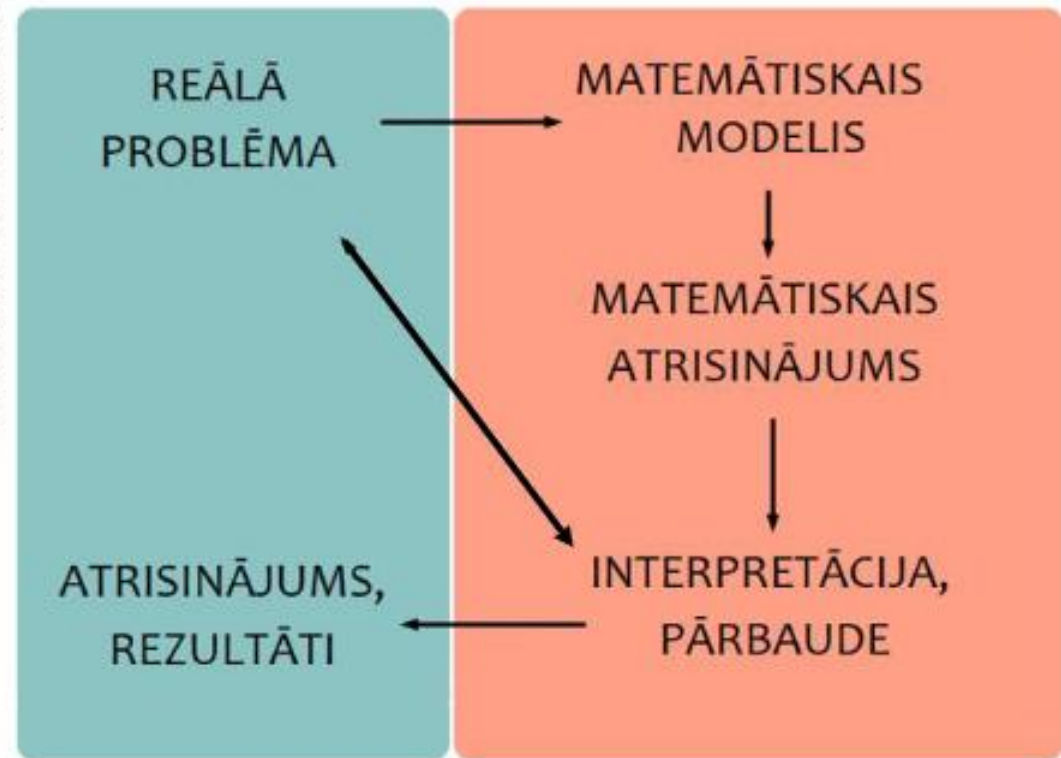
Matemātiskās modelēšanas shēma



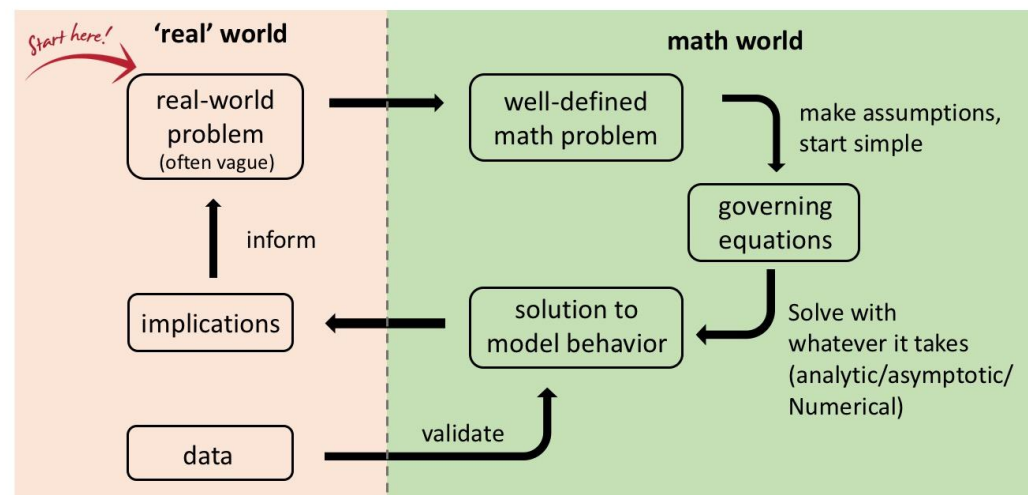
https://skolo.lv/pluginfile.php/18832353/mod_resource/content/5/5_matematiska_modelesana.pdf



REĀLA DZĪVES SITUĀCIJA



Typical mathematical modeling process



Matemātiskā modelēšana STEM projektos

Rūba-Golberga mašīna



Cik garu domino virkni var izveidot, lai iekustinot pirmo kauliņu, visi pārējie apgāztos?

Saules paneļu efektīva izmantošana



Noskaidrot, kādā leņķī attiecībā pret zemi būtu jābūt novietotiem saules paneļiem, lai maksimāli varētu izmantot saules staru enerģiju ?

Sakarības aprakstīšana un attēlošana grafiski



Fiksēt reāla procesa divus lielumus, starp kuriem pastāv sakarība, izveido situācijas aprakstu. Zīmē sakarības grafiku, pārveidojot mērvienības atbilstoši situācijas kontekstam.

Matemātiskā modelēšana veicot centralizētā eksāmena piekļuves nosacījuma darbus

<https://ej.uz/piekluvessarbi>

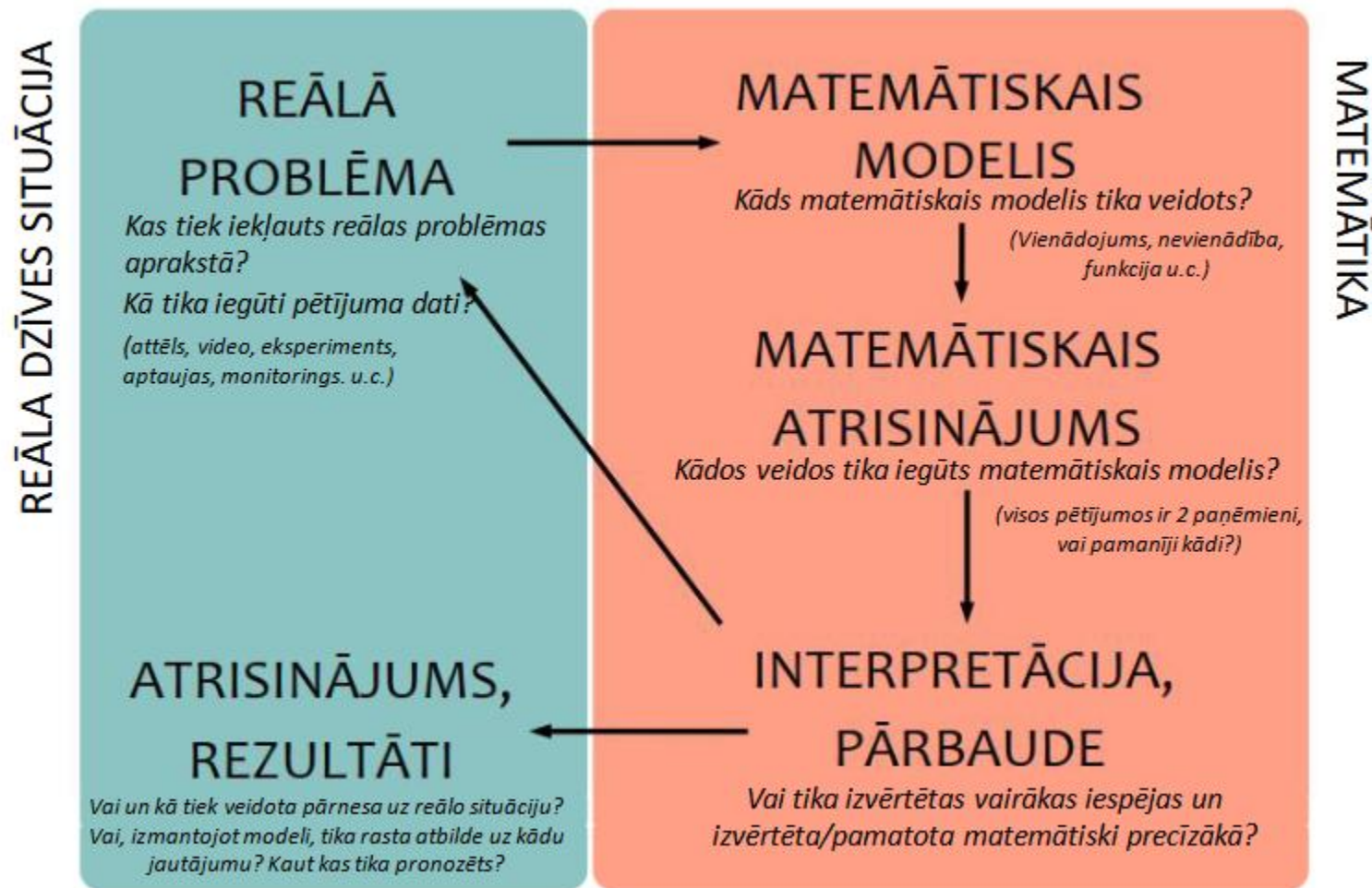
ATBILDI UZ JAUTĀJUMIEM PAR IZLASĪTO DARBU:

GRUPA AR DAŽĀDIEM PĒTĪJUMIEM:

1. Kādi soļi raksturo matemātisko modelēšanu? (ko saskatīji darbā)
2. Izpētiet matemātiskās modelēšanas ciklu un atbildat uz jautājumiem.
3. Kādi kritēriji raksturo labu darbu?

GRUPA AR VIENĀDIEM PĒTĪJUMIEM:

Aplūko individuālais izpētes darbs kritērijus, atrodat izlasītajos darbos pazīmes, kas raksturo, ka tas ticis sasniegts.



Strādājošo janvāra vidējās darba algas apkopojums, pieauguma prognozēšana

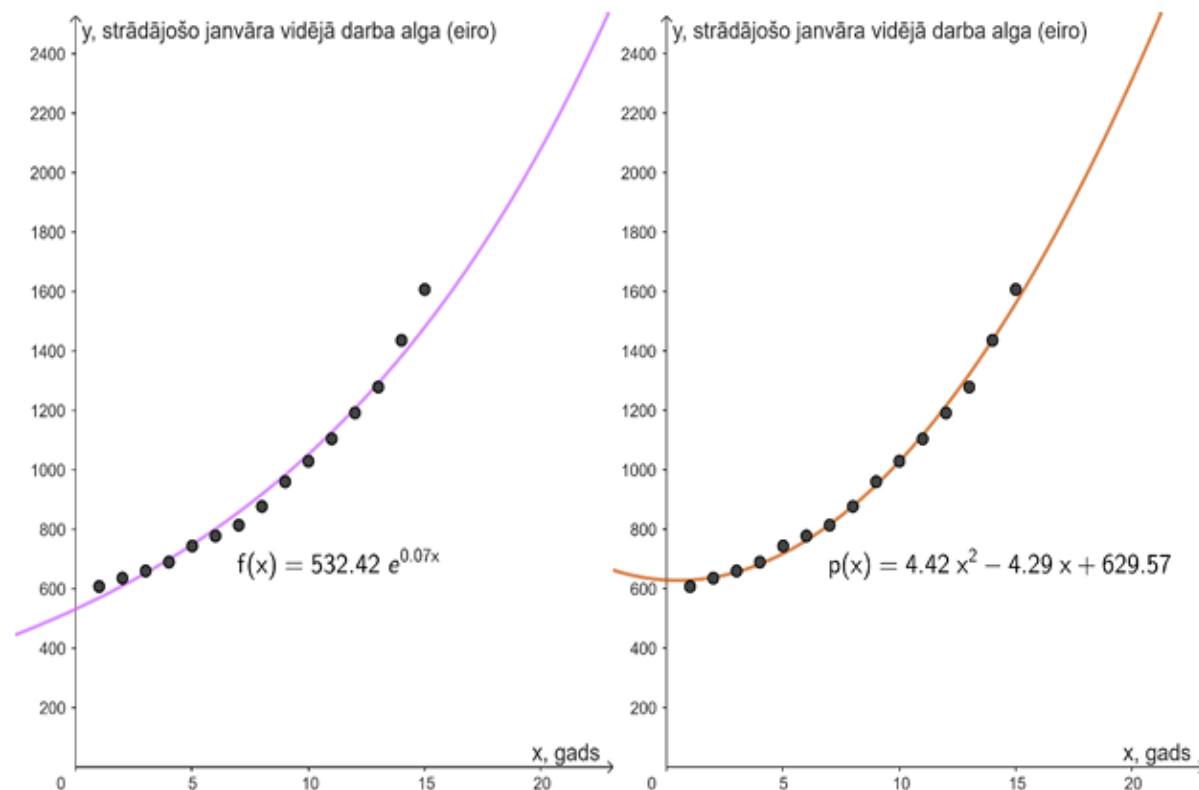
Ievads

Darba alga ir viens no nozīmīgākajiem ekonomiskajiem rādītājiem, kas ietekmē iedzīvotāju labklājību un dzīves kvalitāti. Tā nosaka ienākumu līmeni, iespēju segt ikdienas izdevumus un veidot uzkrājumus nākotnei. Šīs tēmas aktualitāti apzinājos 2025. gada 13. janvārī, kad ekonomists Pēteris Strautiņš izteica viedokli, ka, lai gan algas pieaug, iedzīvotāji joprojām izjūt pesimismu par nākotni. [1]

Neskatoties uz algu pieaugumu pēdējos gados, sabiedrībā valda uzskats, ka atalgojuma līmenis Latvijā joprojām ir pārāk zems. Pētījumi liecina, ka 78% iedzīvotāju uzskata darba algu par nepietiekamu. Tomēr Pēteris Strautiņš norāda, ka šis viedoklis ne vienmēr balstās uz objektīviem ekonomikas datiem, jo vidējā darba alga valstī ilgstoši ir palielinājusies. Šī pretruna starp statistiskajiem rādītājiem un sabiedrības uztveri rosināja mani padziļināti izpētīt, vai algu pieaugums patiešām ir bijis tik nozīmīgs, kā to norāda ekonomists. [1]

Balstoties uz Centrālās statistikas pārvaldes (CSP) datiem, es izveidoju pētījumu, kurā analizēju strādājošo janvāra vidējās darba algas izmaiņas laika posmā no 2010. līdz 2024. gadam. [2] Izmantojot matemātiskās modelēšanas metodes, es prognozēju iespējamās algu attīstības tendences nākotnē.

Darba mērķis: Analizēt strādājošo janvāra vidējās darba algas izmaiņas laika posmā no 2010. līdz 2024. gadam un prognozēt tās pieaugumu 2030.gadā.



2.attēls. Eksponentfunkcijas un kvadrātfunkcijas grafiks

Latvijā esošo aptieku, kuras izgatavo medikamentus, skaita prognozēšana

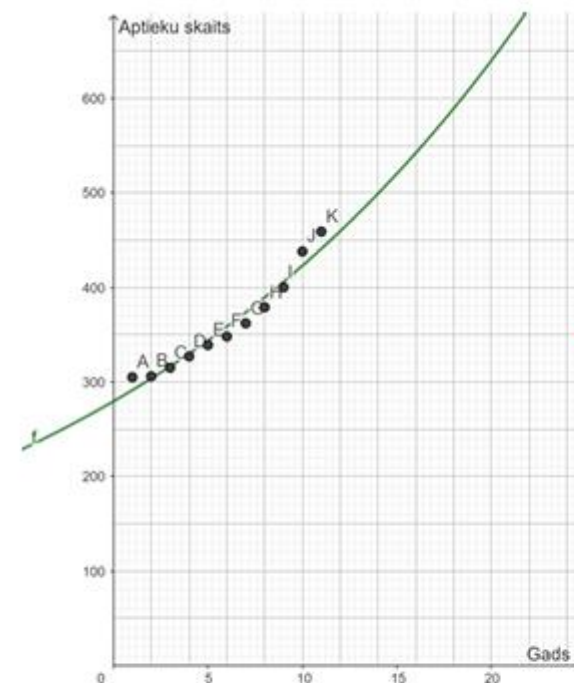
Latvijā uz doto brīdi 2024. gadā kopumā ir 804 aptiekas, bet ne visas aptiekas piedāvā iespēju uz vietas izgatavot zāles [3].

Izvēlējos veikt šādu pētījumu, jo mani nākotnes mērķi ir saistīti ar farmācijas nozari un vēlos uzzināt, kā gadu gaitā mainīsies aptieku, ar ražošanas iespējām, skaits, tādejādi arī farmaceitu pieprasījums šāda veida aptiekās.

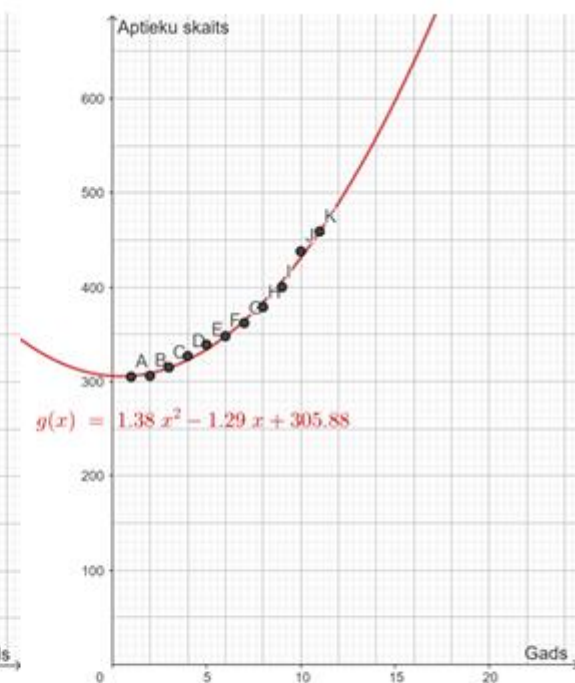
Darba mērķis – noskaidrot līdz šim esošo aptieku skaitu, kuras piedāvā medikamentu izgatavošanu uz vietas, un prognozēt kurā gadā izgatavošana būs pieejama visās šobrīd esošajās Latvijas aptiekās. Darba ietvaros es iegūšu datus par iepriekšējo gadu medikamentu izgatavojošo aptieku skaitu un ar *Geogebra Classic* izveidošu matemātisku modeli un iegūšu funkciju, kas raksturo datus. Noskaidrošu arī šobrīd esošo visu aptieku skaitu Latvijā, lai varētu secināt un prognozēt, pēc cik gadiem teorētiski visās Latvijas aptiekās būs šāda farmācijas iespēja. Noteikšu arī par cik palielināsies farmaceitu darba pieprasījums, ja visās aptiekās būs šāda iespēja.

Secinājumi un prognozēšana

Pēc šī es varu prognozēt, ka 2032. gada beigās, jeb pēc vismaz 8 ar pusi gadiem, šobrīd esošās visas 804 aptiekas, būs aprīkotas un licencētas medikamentu izgatavošanā.



2.attēls. Eksponentfunkcijas grafiks.



3.attēls. Kvadrātfunkcijas grafiks.

Zemākā vidējā momentānā degvielas patēriņa noteikšana atkarībā no transportlīdzekļa ātruma

Mašīna ir gandrīz katra cilvēka neatņemama dzīves sastāvdaļa. Palielinoties cilvēku skaitam un automobiļu pieejamībai, ir pieaudzis CO₂ izmešu skaits (1). Lai to mazinātu, ir noteikts obligātais biodegvielas piejaukuma procentuālais daudzums dīzeļdegvielai un benzīnam. Biodegvielas ražošanas izmaksas ir dārgākas nekā fosilās degvielas, tādēļ sadārdzinās pārvietošanās izmaksas ar personīgo transportlīdzekli. Cilvēki cenšas izvēlēties automobiļus ar mazāku vidējo degvielas patēriņu, braukt ekonomiskāk (vienmērīgāk, ar mazākiem ātrumiem) un dažkārt pat pārvietoties ar sabiedrisko transportu.

Ikdienā skolas vajadzībām nākas katru dienu vidēji nobraukt 45 kilometrus skolas vajadzībām, tāpēc ir svarīgi izvēlēties ekonomisku mašīnu un pareizo ātrumu, lai degvielas patēriņš būtu pēc iespējas mazāks, tādējādi samazinot izmaksas un CO₂ atstātās sekas.

Mana darba mērķis ir noskaidrot ātrumu, pie kura automašīna strādā visefektīvāk, patērējot pēc iespējas mazāk degvielu. Braucot ar vienmērīgu ātrumu, nolasīju vidējo momentāno patēriņu un piefiksēju to tabulā. Izvērtējot datus, izvēlēšos piemērotāko matemātisko funkciju, kas raksturo iegūtos datus. Izmantojot funkciju, es noteikšu optimālo ātrumu, pie kura vidējais momentānais patēriņš ir vismazākais.

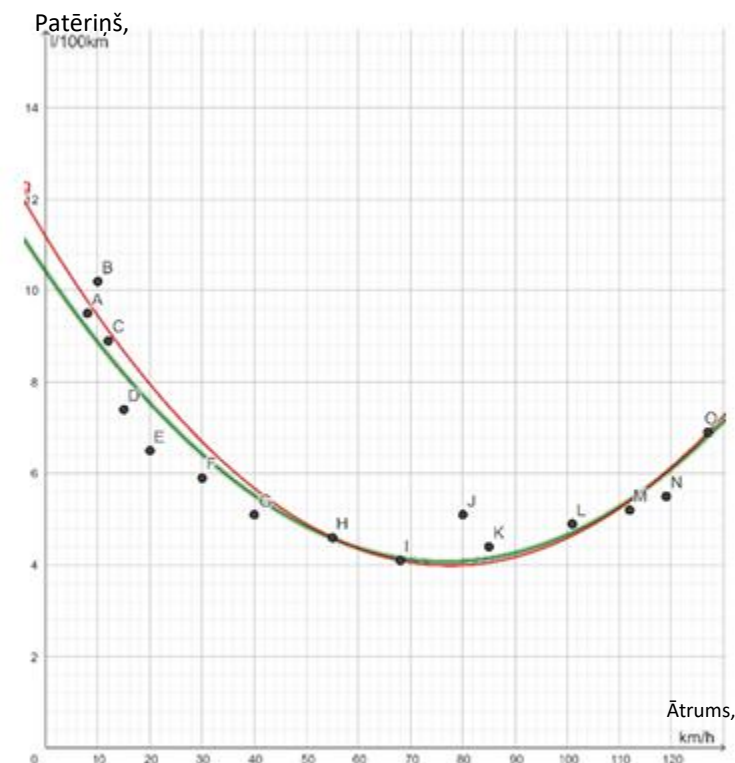
$$X_v = \frac{0,17}{2 \cdot 0,0011} \approx 77,27 \text{ km/h}$$

Lai aprēķinātu aptuveno degvielas patēriņu pie visefektīvākā ātruma, nepieciešams kvadrātvienādojuma mainīgā x vietā ievietot tikko izrēķināto efektīvāko ātrumu:

$$f(x) = 0,0011 \cdot (77,27)^2 - 0,17 \cdot x + 10,42 \approx 6,57 - 13,14 + 10,42 \approx 3,85 \text{ l/100km}$$

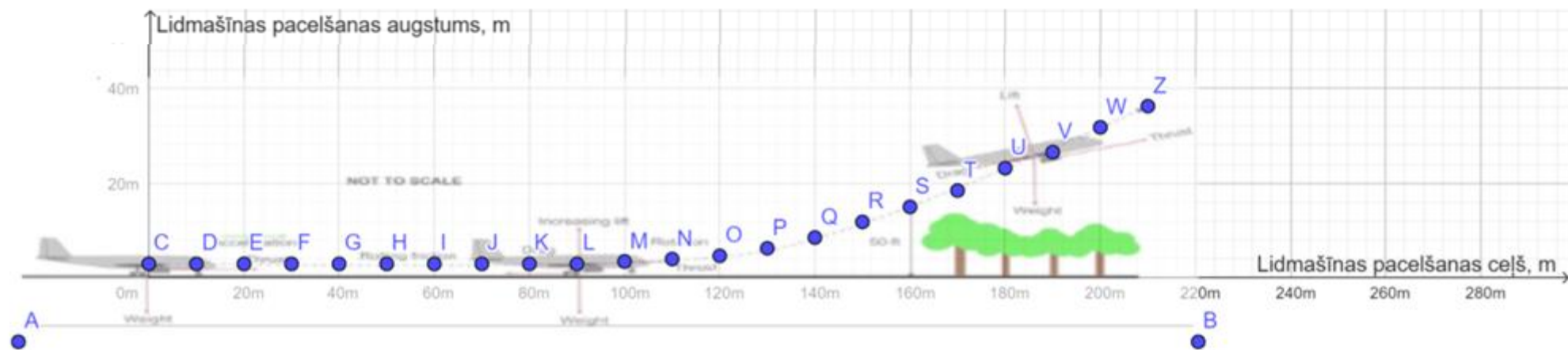
Secinājumi

1. Automašīnas degvielas patēriņu atkarībā no tās ātruma vislabāk var izteikt ar kvadrātfunkcijas grafiku.
2. Salīdzinot Geogebas un manu aprēķināto funkciju, var secināt, ka Geogebas funkcija precīzāk apraksta plašāku spektru ar datiem.
3. Manas automašīnas Volkswagen Golf VII ar 1,6 turbodīzeļa 77kw dzinēju efektīvākais ātrums ir aptuveni 77,27 km/h, pie kura auto patērēs aptuveni 3,85 l/100km.

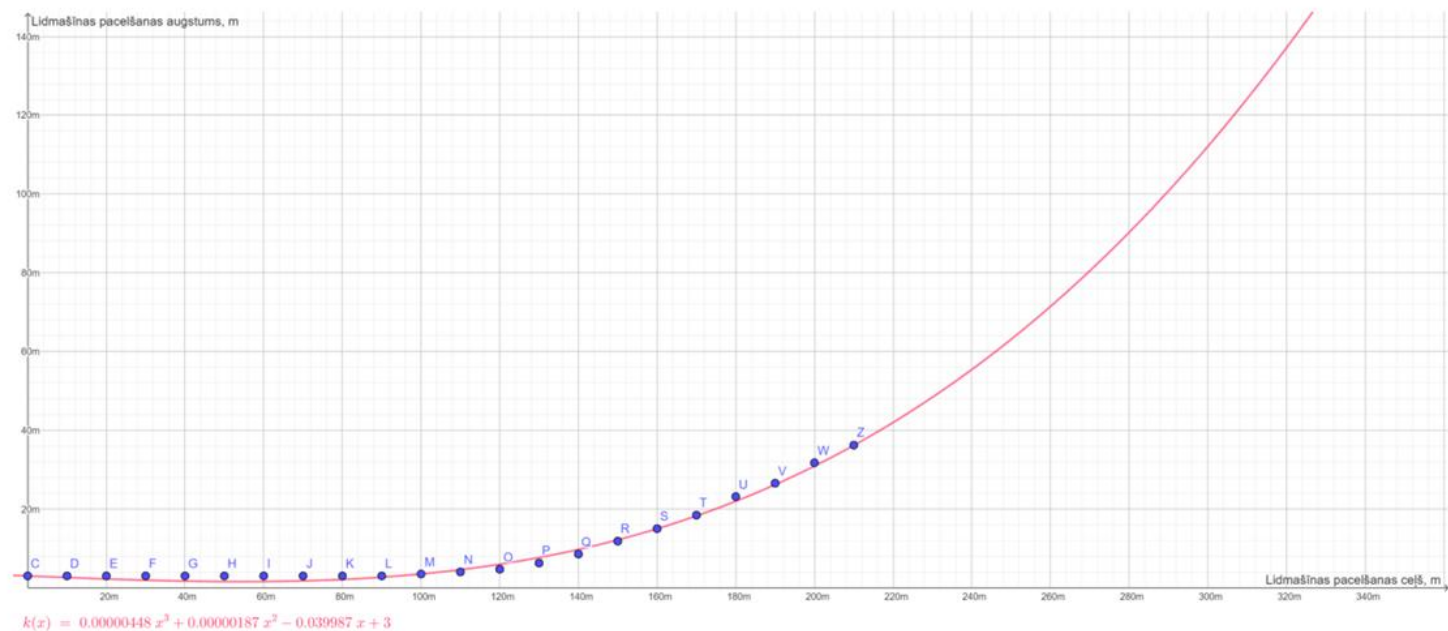


3. attēls. Mana un Geogebas grafiku salīdzinājums

Lidmašīnas pacelšanās procesa trajektorijas noteikšana, lai prognozētu ceļu garumu, pa kuru tiek sasniegts mākoņu līmenis



Šī pētījuma mērķis ir prognozēt ceļu garumu, pa kuru lidmašīnas atrašanās augstums sasniedz mākoņu līmeni pacelšanās laikā. Šī mērķa sasniegšanai pētīšu dažādas funkcijas, kas varētu tikt pielietotas lidmašīnas pacelšanās procesa modelēšanai, ņemot vērā augstuma maiņu attiecībā pret ceļu garumu.



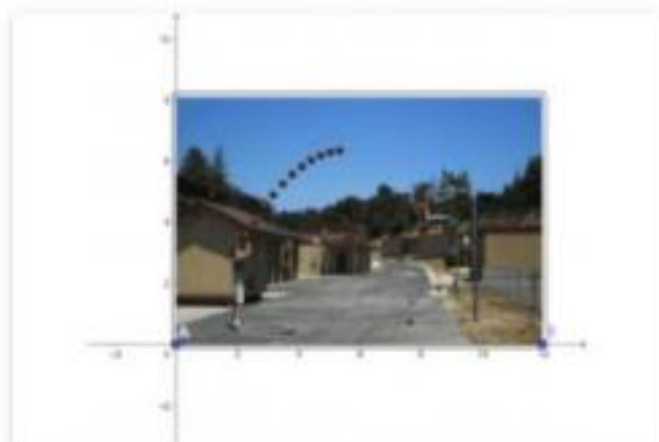
Matemātiskā modeļa (funkcijas) izveide

≡ GeoGebra

<https://www.geogebra.org/m/xmpm4zcs>

Izveido matemātisko modeli (funkciju)

Author: GeoGebra Institute of Jelgava



...no attēla

<https://www.youtube.com/watch?v=OAJ9jIRgzDE>



... no datu tabulas

1. uzdevumam papildus

- Nomaini nosaukumus uz asīm
- Uzliec dažādas vienības uz asīm
- Noņem nevajadzīgās plaknes

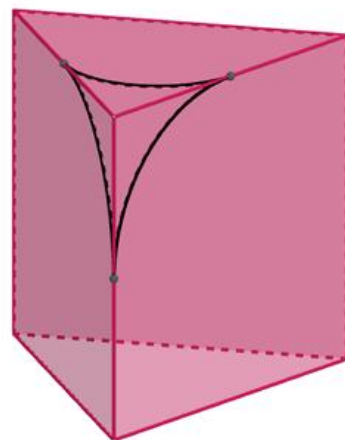
Matemātiskā modelēšana skolēnu zinātniskās pētniecības darbu izstrādē



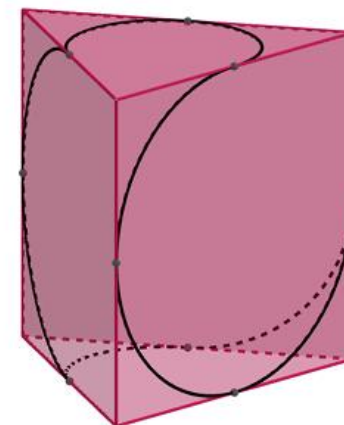
<https://www.geogebra.org/classic/pnfrfhcv>

$$\text{Ja } g < \frac{a \left(1 - \cos \frac{180^\circ}{n}\right)}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \text{ tad } S_{fig} = S_{reg} - n(S_{CEF} - S_{seg})$$

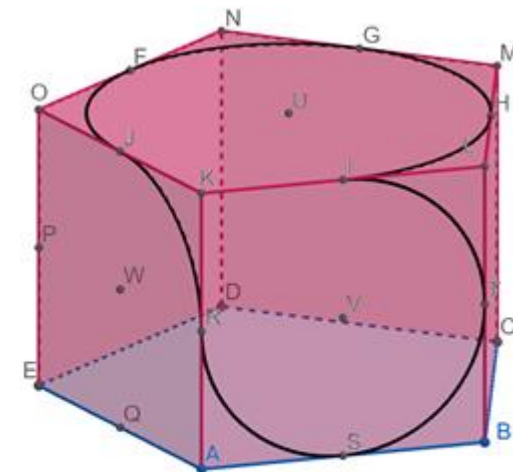
$$\text{Ja } g \geq \frac{a \left(1 - \cos \frac{180^\circ}{n}\right)}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}, \quad \text{тад } S_{\text{fig}} = \pi \left(\frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} - g \right)^2$$



Īsākās līnijas modelis
trijstūra prizmā



Garākās līnijas modelis
trijstūra prizmā



Vienkāršas slēgtas līnijas izveide

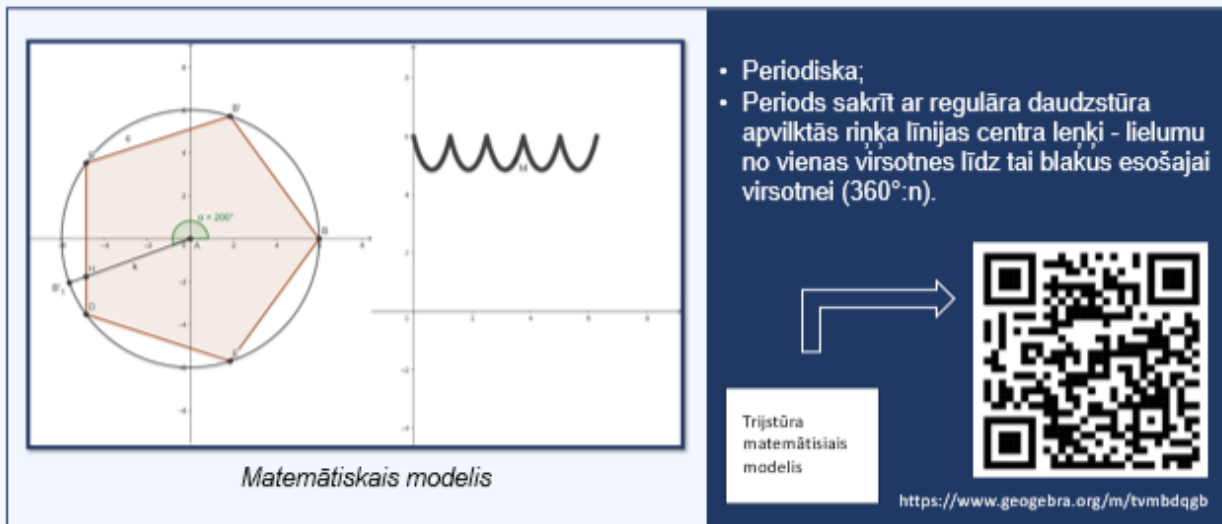
Īsākās iespējamās vienkāršas slēgtas līnijas garuma formula:

$$l_{is_lin} = \pi a \left(-\frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n} + \frac{1}{2} \right)$$

Garākās iespējamās vienkāršas slēgtas līnijas garuma formula:

$$l_{gar_lin} = \pi a \left(\frac{n \cdot ctg \frac{180^\circ}{n}}{n} + \frac{n}{2} \right)$$

Sakarības iegūšana



Pētījumā iegūtie dati par konkrētu gadījumu

Regulārs daudzstūris	Matemātiskais modelis	Nogriežņa garuma formula trijstūrī	N-stūra nogriežņa garuma formula
Trijstūris, $n=3$		$l = \frac{a}{\sqrt{3}\cos\alpha + 3\sin\alpha}$ $\alpha \in [0^\circ; 120^\circ]$	$l = \frac{a \cdot \cos(60^\circ)}{2\sin(150^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ)}$ $\alpha \in [0^\circ; 120^\circ]$
	Matemātiskā modeļa grafiks, ja $a = 12 \sin(60^\circ)$		Formulas (n-stūra) grafiks, ja $a = 12 \sin(60^\circ)$

<https://www.geogebra.org/m/tvmbdqgb>

Regulāra n-stūra formula

$$l = \frac{a \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{2\sin\left(90^\circ + \frac{180^\circ}{n} - \left(\alpha - \frac{360^\circ}{n} \cdot k\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)},$$

kur

l – nogriežņa, kas savieno riņķa līnijas centru ar regulāra daudzstūra malu, garums;

a – malas garums;

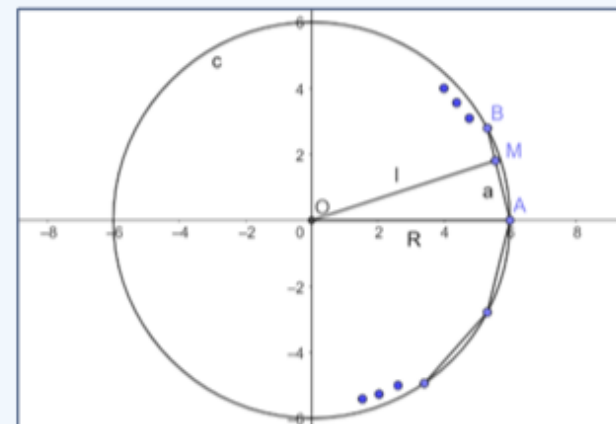
k – vesels skaitlis;

α – pagrieziņa leņķis, intervālā $[0^\circ; \frac{360^\circ}{n}]$;

n – daudzstūra virsotņu skaits.

- Par pamatu n-stūra sakarības iegūšanai tika izmantota sinusu teorēma

$$\frac{l}{\sin \angle OAM} = \frac{R}{\sin \angle OMA}$$



Riņķa līnijā ievilkts daudzstūris



Kur meklē idejas:

Pētījumos:

- <https://pisa2022-maths.oecd.org/ca/index.html#Examples>

Žurnālos

- <https://www.nsta.org/quantum-magazine-math-and-science>

Forumos:

- <https://www.ocf.berkeley.edu/~wwu/riddles/hard.shtml>